

Θεωρία Αριθμών

Τρίτη 29-1-2019

1. (1 μονάδα) Βρείτε όλα τα $n \in \mathbb{N}$ για τα οποία το $(-1 + i)^n$ είναι φανταστικός αριθμός.
2. (1 μονάδα) Βρείτε σε τριγωνομετρική μορφή τις λύσεις της $z^7 = i$.
3. (1 μονάδα) Οι αριθμοί a, b είναι ακέραιοι και ο b είναι περιττός. Δείξτε ότι αν $\mu.κ.δ. (a, b) = 1$ τότε $\mu.κ.δ. (\varphi(24)a - b, a^{24}b) = 1$.
4. (1 μονάδα) Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $2017!$ με το 2019.
5. (2 μονάδες) Βρείτε τον μικρότερο φυσικό μεγαλύτερο του 1000 που είναι λύση του συστήματος γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{8} \\ 5x \equiv 4 \pmod{7} \\ 2x \equiv 5 \pmod{9} \end{cases}$$

6. (2 μονάδες)
 - (1) Αποδείξτε ότι το 37 είναι πρώτος.
 - (2) Αποδείξτε ότι το 5 είναι αρχική ρίζα $\pmod{37}$, ενώ το 3 δεν είναι.
 - (3) Βρείτε όλους τους φυσικούς x ώστε $x \leq 40$ και $\text{ord}_{37}(5^x) = 18$.
 - (4) Βρείτε όλους τους φυσικούς y ώστε $5^{2y} \equiv 1 \pmod{37}$.
7. (1 μονάδα) Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της Διοφαντικής εξίσωσης

$$42x - 93y = 123,$$

ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις.

8. (1 μονάδα) Δίνεται ότι ο 2017 είναι πρώτος αριθμός. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του

$$2020^{2017} + 2019^{2016} + 2018^{2015} + 2017^{2014} + 2016^{2013}$$

με το 2017.

Καλή επιτυχία.